ISBN X-XXXXX-XXX-X ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПЕРЕСЛАВЛЬ-ЗАЛЕССКИЙ, 2006

УДК 517.957

В. А. Юмагужин, В. Н. Юмагужина

Алгоритм вычисления агебр изотропии уравнений $y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y)$

Аннотация. Действие псевдогруппы всех точечных преобразований переменных x, y в естественном расслоении π обыкновенных дифференциальных уравнений $y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y)$ продолжается до действия в расслоение k-джетов сечений расслоения π, $k = 0, 1, 2, \dots$. В работе представлена программа для вычисления в системе компьютерной алгебры REDUCE агебр изотропии этого действия.

Ключевые слова и фразы: Обыкновенное уравнение 2-го порядка, точечное преобразование, расслоение джетов, алгебра изотропии.

1. Введение

Цель настоящей статьи — представить программу в системе компьютерной алгебры REDUCE для вычисления алгебр изотропии действия точечных преобразований в джет-расслоениях уравнений

$$y'' = a(x,y) + b(x,y)y' + c(x,y)y'^2 + d(x,y)y'^3 \,. \tag{1}$$

В разделе 2, следуя [1], [2] и [3], мы напоминаем все необходимые предварительные сведения, а также алгоритм вычисления алгебр изотропии.

В разделе 3 представлена REDUCE-программа, реализующая алгоритм вычисления алгебр изотропии.

Все многообразия и отображения в этой работе предполагаются гладкими. Через $[f]^k_p$, $k = 0, 1, 2, \dots$, обозначается k-джет отображения f в точке p, через $\mathbb{R}$ обозначается поле действительных чисел и через $\mathbb{R}^n$ — n-мерное арифметическое пространство. Мы предполагаем суммирование по повторяющимся индексам во всех формулах.

2. Алгоритмы

2.1. Естественное расслоение уравнений (1). Пусть

$$\pi : E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

— тривиальное расслоение. Через x^1, x^2 обозначим стандартные координаты на базе этого расслоения, а через u^1, u^2, u^3, u^4 — обозначим стандартные координаты на его слое. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольное уравнение (1). Мы отождествляем его с сечением $S_{\mathcal{E}}$ расслоения π, определенным формулой

$$S_{\mathcal{E}}(p) = \big(\, p,\, a(p),\, b(p),\, c(p),\, d(p)\,\big),$$

where $p = (x^1, x^2)$. Ясно, что это отождествление является биекцией между множеством всех уравнений (1) и множеством всех сечений расслоения π. Прямым вычислением легко проверить, что произвольное точечное преобразование

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y) \tag{2}$$

преобразует уравнение $\mathcal{E}$ вида (1) в уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$ того же вида. Его коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ выражаются через коэффициенты уравнения $\mathcal{E}$ и 2-джет обратного преобразования f^{-1}:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}(\tilde{p}) = \Phi^1\big(\, a(f^{-1}(\tilde{p})), \ldots, d(f^{-1}(\tilde{p})),\ [f^{-1}]^2_{\tilde{p}}\,\big) \\ &\cdots \qquad \cdots \\ &\tilde{d}(\tilde{p}) = \Phi^4\big(\, a(f^{-1}(\tilde{p})), \ldots, d(f^{-1}(\tilde{p})),\ [f^{-1}]^2_{\tilde{p}}\,\big)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно уравнения

$$\begin{aligned} &(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = f(x^1, x^2) \\ &\tilde{u}^i = \Phi^i\big(\, u^1, \ldots, u^4,\ [f^{-1}]^2_{f(p)}\,\big), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{4}$$

определяют диффеоморфизм $f^{(0)}$ расслоения π. Он называется *поднятием преобразования f в расслоение* π. Очевидно, в области определения диффеоморфизма $f^{(0)}$ выполнено условие

$$f \circ \pi = \pi \circ f^{(0)}\,.$$

Ясно, что поднятие тождественного точечного отображения является тождественным диффеоморфизмом. Кроме того, для любых точечных преобразований f_1 и f_2, для которых определена их композиция $f_1 \circ f_2$, выполнено условие

$$(f_1 \circ f_2)^{(0)} = f_1^{(0)} \circ f_2^{(0)}$$

Т. о. расслоение π является естественным расслоением. Мы называем его *расслоением уравнений* (1).

Закон преобразования уравнений (1) в терминах соответствующих сечений имеет, очевидно, следующий вид

$$S_{\tilde{\mathcal{E}}} = f^{(0)} \circ S_{\mathcal{E}} \circ f^{-1}.$$

2.2. Поднятия в расслоения джетов. Через $[S]_p^k$ обозначим k-джет сечения S расслоения π в точке p, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, через

$$\pi_k : J^k\pi \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi_k : [S]_p^k \mapsto p\,,$$

— расслоение всех таких k-джетов. Стандартные координаты в $J^k\pi$ обозначим через x^1, x^2, u^i_σ, $i = 1, \ldots, 4$, $0 \le |\sigma| \le k$, где σ — мультииндекс $\{j_1 \ldots j_r\}$, $|\sigma| = r$, $j_1, \ldots, j_r = 1, 2$. Через σj обозначим мультииндекс $\{j_1 \ldots j_r j\}$. Естественная проекция

$$\pi_{k,\,r} : J^k\pi \longrightarrow J^r\pi\,, \quad \infty \ge k > r,$$

определяется формулой $\pi_{k,\,r}(\,[S]_p^k\,) = [S]_p^r$. Через $J_p^k\pi$ обозначим слой расслоения π_k над точкой p, т. е. $J_p^k\pi = \pi_k^{-1}(p)$.

Каждое сечение S расслоения π порождает сечение $j_k S$ расслоения π_k

$$j_k S : p \;\mapsto\; [S]_p^k.$$

Всякое точечное преобразование f формулой

$$f^{(k)}(\,[S]_p^k\,) = \left[\, f^{(0)} \circ S \circ f^{-1} \,\right]_{f(p)}^k . \tag{5}$$

определяет диффеоморфизм $f^{(k)}$ расслоения $J^k\pi$. Он называется *поднятием преобразования f в расслоение джетов $J^k\pi$*. Следующие свойства очевидны:

$$f \circ \pi_k = \pi_k \circ f^{(k)}$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}^{(k)} = \mathrm{id}_{J^k\pi}$$
$$(f_1 \circ f_2)^{(k)} = f_1^{(k)} \circ f_2^{(k)}$$

Через Γ обозначим псевдогруппу всех точечных преобразований базы расслоения π. Эта псевдогруппа действует на каждом расслоении $J^k\pi$ посредством поднятых преобразований.

Для всякой точки $\theta_k \in J^k\pi$ обозначим через G_{θ_k} *группу изотропии этой точки*, т. е.

$$G_{\theta_k} = \left\{\; [f]_p^{2+k} \;\middle|\; f \in \Gamma\,,\; f^{(k)}(\theta_k) = \theta_k \;\right\}.$$

2.3. Подъем векторных полей. Пусть X — векторное поле на базе расслоения π и f_t — поток этого поля. Тогда поток $f_t^{(k)}$ на расслоении $J^k\pi$ определяет векторное поле $X^{(k)}$ in $J^k\pi$, которое нзывается *подъемом поля X в расслоение $J^k\pi$*. Очевидно

$$(\pi_{l,\,m})_*\big(\,X^{(l)}\,\big) = X^{(m)}\,, \quad \infty \ge l > m \ge -1\,,$$

Опишем векторное поле $X^{(k)}$ в стандартных координатах расслоения $J^k\pi$. Пусть S — сечение расслоения π в области определения векторного поля X, p — точка этой области и $\theta_1 = [S]^1_p$. Тогда вектор-функция ψ_X определенная формулой

$$\psi_X(\theta_1) = \begin{pmatrix} \psi^1_X(\theta_1) \\ \cdots \\ \psi^4_X(\theta_1)\,. \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\big(\,f_t^{(0)} \circ S \circ f_t^{-1}\,\big)\Big|_{t=0}(p) \tag{6}$$

есть *скорость деформации* сечения S в точке p под действием потока поля X. Пусть

$$X = X^1\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2\frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{and} \quad \theta_1 = (x, u^i, u^i_j),$$

тогда можно вычислить, например, с помощью REDUCE-программы раздела 3.2, что

$$\psi_X(\theta_1) = \begin{pmatrix} -u^1_1X^1 - u^1_2X^2 \\ -2u^1X^1_1 + u^1X^2_2 - u^2X^2_1 \\ +X^2_{11} \\ \\ -u^2_1X^1 - u^2_2X^2 \\ -3u^1X^1_2 - u^2X^1_1 - 2u^3X^2_1 \\ -X^1_{11} + 2X^2_{12} \\ \\ -u^3_1X^1 - u^3_2X^2 \\ -2u^2X^1_2 - u^3X^2_2 - 3u^4X^2_1 \\ -2X^1_{12} + X^2_{22} \\ \\ -u^4_1X^1 - u^4_2X^2 \\ -u^3X^1_2 + u^4X^1_1 - 2u^4X^2_2 \\ -X^1_{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $X^i_j = \dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}(p)$ and $X^i_{j_1j_2} = \dfrac{\partial^2 X^i}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}}(p)$. Векторное поле $X^{(k)}$ описывается формулой, см. [1], [2],

$$X^{(k)} = (\pi_{\infty,\,k})_*(X^{(\infty)}) = X^1D^{(k)}_1 + X^2D^{(k)}_2 + Э^{(k)}_{\psi_X}\,, \tag{8}$$

где

$$D_j^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{0\le|\sigma|\le k}\sum_{i=1}^{4} u^i_{\sigma j}\frac{\partial}{\partial u^i_\sigma}\,, \quad j=1,2\,,$$

$$(9) \qquad Э^{(k)}_{\psi_X} = \sum_{0\le|\sigma|\le k}\sum_{i=1}^{4}\Big(D_\sigma\big(\,\psi^i_X\,\big)\Big)\frac{\partial}{\partial u^i_\sigma}, \quad D_\sigma = D_{j_1}\circ\ldots\circ D_{j_r}.$$

Через $X^{(k)}_{\theta_k}$ обозначим значение поля $X^{(k)}$ в точке θ_k. Тогда из формул (8), (9) и (7) вытекает

Лемма 1. *Вектор $X^{(k)}_{\theta_k}$ определяется $k+2$-джетом $[X]^{k+2}_p$, где $p=\pi_k(\theta_k)$.*

2.4. Алгебры изотропии. Пусть $\theta_k \in J^k\pi$ и $p=\pi_k(\theta_k)$. Через $\mathfrak{g}_{\theta_k}$ обозначим алгебру Ли группы изотропии G_{θ_k} точки θ_k:

$$\mathfrak{g}_{\theta_k} = \{\ [X]^{2+k}_p \mid X^{(k)}_{\theta_k} = 0\ \}$$

Алгебра $\mathfrak{g}_{\theta_k}$ называется *алгеброй изотропии точки* θ_k. Из этого определения и формул (8), (9) вытекает

Теорема 2. *Пусть в стандартных координатах*

$$[X]^{2+k}_p = (p, 0, X^i_j, \ldots, X^i_{j_1\ldots j_{2+k}})$$

Тогда $[X]^{2+k}_p \in \mathfrak{g}_{\theta_k}$ если и только если $(0, X^i_j, \ldots, X^i_{j_1\ldots j_{2+k}})$ есть решение системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$(10) \qquad \big(D_\sigma\big(\,\psi^i_X\,\big)\big)(\theta_k) = 0\,, \quad 0\le|\sigma|\le k\,.$$

3. REDUCE-программы

3.1. Закон преобразования коэффициентов.

COMMENT———————————————————

This program calculates the transformation law (3) of coefficients of ODEs

p2=v(0,0,0)+v(1,0,0)*p1+v(2,0,0)*p1**2+v(3,0,0)*p1**3

w.r.t. point transformations

(x,y)⟶ (q(0,0),p(0,0)).

It expresses p1 and p2 in terms of x, y, y1, y2 and substitutes these expressions in the initial ODE. As a result, the coefficients u(0,0,0), u(1,0,0), u(2,0,0), u(3,0,0) of the transformed ODE

y2=u(0,0,0)+u(1,0,0)*y1+u(2,0,0)*y1**2+u(3,0,0)*y1**3 express in the terms of coefficients v(0,0,0), v(1,0,0), v(2,0,0), v(3,0,0) of the initial one and derivatives of q and p are obtained.

———————————————————————- ———————— ;

```
OFF NAT;

DEPEND q,x,y; DEPEND p,x,y;

OPERATOR DX,v,u,n;

FOR ALL j1,j2 LET
df(p(j1,j2),x)=p(j1+1,j2), df(p(j1,j2),y)=p(j1,j2+1),
df(q(j1,j2),x)=q(j1+1,j2), df(q(j1,j2),y)=q(j1,j2+1);

FOR ALL A LET
DX(A)=df(A,x)+df(A,y)*y1+df(A,y1)*y2+df(A,y2)*y3 +df(A,y3)*y4;

LET
p1=DX(p(0,0))/DX(q(0,0)), p2=DX(p1)/DX(q(0,0)),
n(3)=6, n(2)=2, n(1)=1, n(0)=1; % By definition n(i)=i! for all i.

FACTOR y2, y1;

G:=p2- v(3,0,0)*p1**3-v(2,0,0)*p1**2-v(1,0,0)*p1 -v(0,0,0);
H:= DF(G,y2);

FACTOR v(0,0,0),v(1,0,0),v(2,0,0),v(3,0,0);

G:=y2-G/H; % It's the right hand side of the transformed ODE.
CLEAR H;

%————————- Coefficients of the transformed ODE ——————————

OUT Result1; % The file "Result1"is opened.
FOR i:=0:3 DO WRITE u(i,0,0),":= ", SUB(y1=0,DF(G,y1,i))/n(i);
CLEAR G;
SHUT Result1; % The file "Result1"is closed.
END; % End of the program.
```

3.2. Скорость деформации коэффициентов.

COMMENT——————————————————-
This program calculates a deformation velocity of coefficients of ODE
y2=u(0,0,0)+u(1,0,0)*y1+u(2,0,0)*y1**2+u(3,0,0)*y1**3
w.r.t. point fields on the base of π. It realizes formula (6) by a procedure DS.

Here $(q(0,0), p(0,0))$ is a flow of vector field $a(0,0,0)\partial_x + a(1,0,0)\partial_y$ on the base of π.
————————————————————————————— ———————————-;

```
OFF NAT;

OPERATOR q,p,v,u,g;

DEPEND q, s,x,y; DEPEND p, s,x,y;
DEPEND v(3,0,0),s; DEPEND v(2,0,0),s;
DEPEND v(1,0,0),s; DEPEND v(0,0,0),s;

% Load the file "Result1"(Coefficients of the transformed ODE
IN Result1;

% ——————————————————— ——————————
PROCEDURE DS(AA);
begin
    SCALAR Sc;
    Sc:= df(AA,s);
    Sc:= sub({
    df(q(0,0),s)=a(0,0,0), df(q(1,0),s)=a(0,1,0), df(q(0,1),s)=a(0,1,0),
    df(q(2,0),s)=a(0,2,0), df(q(1,1),s)=a(0,1,1), df(q(0,2),s)=a(0,0,2),
    df(p(0,0),s)=a(1,0,0), df(p(1,0),s)=a(1,1,0), df(p(0,1),s)=a(1,1,0),
    df(p(2,0),s)=a(1,2,0), df(p(1,1),s)=a(1,1,1), df(p(0,2),s)=a(1,0,2)
    }, Sc);
Sc:= sub({
    q(1,0)=1, q(0,1)=0, q(2,0)=0, q(1,1)=0, q(0,2)=0,
    p(1,0)=0, p(0,1)=1, p(2,0)=0, p(1,1)=0, p(0,2)=0
    }, Sc);
    Sc:= sub(df(v(0,0,0),s)= u(0,1,0)*a(0,0,0) + u(0,0,1)*a(1,0,0), Sc);
    Sc:= sub(df(v(1,0,0),s)= u(1,1,0)*a(0,0,0) + u(1,0,1)*a(1,0,0), Sc);
    Sc:= sub(df(v(2,0,0),s)= u(2,1,0)*a(0,0,0) + u(2,0,1)*a(1,0,0), Sc);
    Sc:= sub(df(v(3,0,0),s)= u(3,1,0)*a(0,0,0) + u(3,0,1)*a(1,0,0), Sc);
    Sc:= sub({ v(0,0,0)=u(0,0,0),v(1,0,0)=u(1,0,0),v(2,0,0)=u(2,0,0),
               v(3,0,0)=u(3,0,0)}, Sc);
```

```
    RETURN -Sc;
end;

%——————————————————————————————————- —————————————————-;
ORDER u(3,1,0),u(3,0,1),u(2,1,0),u(2,0,1),u(1,1,0),u(1,0,1), u(0,1,0),
u(0,0,1), u(3,0,0),u(2,0,0),u(1,0,0),u(0,0,0);

OUT Result2;
    g(0):= DS(u(0)); g(1):= DS(u(1)); g(2):= DS(u(2)); g(3):= DS(u(3));
SHUT Result2;

END;
```

3.3. Вычисление алгебр изотропии.

COMMENT——————————————————————————————————- ———————————————————-
This program calculates system (10) of liear algebraic equations defining the izotropy algebra of a point $\theta_k \in J^k\pi$, $k = 0, 1, 2 \dots$.
——— —————————————————-;

```
OFF NAT;

OPERATOR a,u,g,N,ii,Eqv,Cff,Cff1;

% j=0,1, the jet components of a vector field on the base
DEPEND a(j,i1,i2), X,Y;

% coordinates of a jet bundle fiber
DEPEND u(j,i1,i2), X,Y;

FOR ALL j,i1,i2 LET
DF(a(j,i1,i2),X)=a(j,i1+1,i2), DF(a(j,i1,i2),Y)=a(j,i1,i2+1),
DF(u(j,i1,i2),X)=u(j,i1+1,i2), DF(u(j,i1,i2),Y)=u(j,i1,i2+1);

% Load the file "Result2"(Components g(0), g(1), g(2), g(3) of the
% deformation velocity of a section of the bundle w.r.t vector field
% in the base.
IN Result2;

% ———————————————————————————————— ——————————————————————————————————
% The following procedure creates the array "arrders"of all
% Nth derivatives of the function FN=FN(x,y)
PROCEDURE DERS(N,FN);
begin
    scalar j2,der,j; % N+1 is the number of all N-th deriv-s.
    array arrders(N);
```

```
    j:=-1;
    for j1:=N step (-1) until 0 do
    « j2:=N-j1; j:=j+1; arrders(j):=df(FN,x,j1,y,j2)
    »;
end;
%——————————————————- ——————————————————
% The following procedure returns a number of all derivatives of order
% <= N for the function FN(0,0)
PROCEDURE NUMVARS(N);
begin
    scalar s;
    s:=0;
    for m:=0:N do s:=s+(m+1);
    return s;
end;
%—————————————————— ——————————————————
% The following procedure creates the array "arrvars"of all derivatives
% of order <= N for the functions a(j,0,0).
PROCEDURE VARS(N);
begin
    scalar num,j1,j2,r,rr;
    num:=2*NUMVARS(N)-1;
    array arrpsys(num);
    for m:=0:N do
    « r:=m+1; % the number of m-th derivatives of a(j,0,0)
      rr:=2*NUMVARS(m-1);
      for j:=0:1 do
      « DERS(m,a(j,0,0));
       j1:=rr+j*r; j2:=j1+r-1;
       for s:=j1:j2 do arrvars(s):=arrders(s-j1)
      »
    »;
    clear arrders;
end;
%—————————————————— ——————————————————
% The following procedure creates the Nth differential prolongation
% of the PDEs system g(0),g(1),g(2),g(3) as the array "arrpsys"
% of PDEs with a(j,0,0)=0 for j=0,1.
```

```
PROCEDURE PSYS(N);
begin
    scalar num,j1,j2,r,rr;
    num:=4*NUMVARS(N)-1;
    array arrpsys(num);
    for m:=0:N do
    « r:=m+1; % the number of m-th derivatives of g(j)
      rr:=4*NUMVARS(m-1);
      for j:=0:3 do
      « DERS(m,g(j));
        j1:=rr+j*r; j2:=j1+r-1;
        FOR s:=j1:j2 DO
        arrpsys(s):=SUB({a(0,0,0)=0, a(1,0,0)=0}, arrders(s-j1))
      »
    »;
    clear arrders;
end;
%——————————————————————————— ——————————————————————————————
LET k=1; % k=0,1,... is order of the jet bundle.

VARS(k+2);
Lenvar:=2*NUMVARS(k+2)-1; % length of "arrvars"
PSYS(k);
Lensys:=4*NUMVARS(k)-1; % length of "arrpsys"
array arrpsys1(Lenvar);
array arrpnt(Lenvar);

FACTOR a(0,0,0),a(1,0,0),a(0,1,0),a(0,0,1),a(1,1,0),a(1,0,1),a(0,2,0),
a(0,1,1),a(0,0,2),a(1,2,0),a(1,1,1),a(1,0,2),a(0,3,0),a(0,2,1),a(0,1,2),
a(0,0,3),a(1,3,0),a(1,2,1),a(1,1,2),a(1,0,3),a(0,4,0),a(0,3,1),a(0,2,2),
a(0,1,3),a(0,0,4),a(1,4,0),a(1,3,1),a(1,2,2),a(1,1,3),a(1,0,4),a(0,5,0),
a(0,4,1),a(0,3,2),a(0,2,3),a(0,1,4),a(0,0,5),a(1,5,0),a(1,4,1),a(1,3,2),
a(1,2,3),a(1,1,4),a(1,0,5),a(0,6,0),a(0,5,1),a(0,4,2),a(0,3,3),a(0,2,4),
a(0,1,5),a(0,0,6),a(1,6,0),a(1,5,1),a(1,4,2),a(1,3,3),a(1,2,4),a(1,1,5),
a(1,0,6),a(0,7,0),a(0,6,1),a(0,5,2),a(0,4,3),a(0,3,4),a(0,2,5),a(0,1,6),
a(0,0,7),a(1,7,0),a(1,6,1),a(1,5,2),a(1,4,3),a(1,3,4),a(1,2,5),a(1,1,6),
a(1,0,7);
%——————————————————————————— ——————————————————————————————
% The reducing system (10) (that is "arrpsys") to the step form
% "arrpsys1"
```

```
FOR j:=0:Lenvar DO
« Vr:=arrvars(j);
  s:=-1;
  REPEAT
  « s:=s+1;
   Cff:=DF(arrpsys(s),Vr)
  »
  UNTIL (( NUMBERP(Cff) AND (Cff NEQ 0)) OR (s=Lensys) );
  IF ( NUMBERP(Cff) AND (Cff NEQ 0) ) THEN
  « arrpsys1(j):=(1/Cff)*arrpsys(s);
   arrpsys(s):=0;
   Cff:=0;
   FOR r:=0:Lensys DO
   « Cff1:=DF(arrpsys(r),Vr);
    IF (Cff1 NEQ 0) THEN arrpsys(r):=arrpsys(r)-Cff1*arrpsys1(j)
   »;
   arrpnt(j):=1;
   CLEAR Cff1
  »
»;

% —————————————————— ——————————————————
% The reducing "arrpsys1"to the diagonal form
FOR j:=0:Lenvar DO
    IF arrpnt(j)=1 THEN
    « Vr:=arrvars(j);
      Cff:=DF(arrpsys1(j),Vr);
      rr:=j-1;
      FOR r:=0:rr DO
      « Cff1:=DF(arrpsys1(r),Vr);
       IF (Cff1 NEQ 0) THEN
       arrpsys1(r):=Cff*arrpsys1(r)-Cff1*arrpsys1(j)
      »;
    CLEAR Cff,Cff1
    »;
CLEAR arrpnt;

% —————————————————— ——————————————————
OUT Result3;
    WRITE "k = ",k;
```

```
% Print of the diagonal form of system "arrpsys1"
q:=0;
FOR w:=0:Lenvar DO
« WRITE arrvars(w);
  IF (arrpsys1(w) NEQ 0) THEN
  « q:=q+1;
   WRITE "E",q,": ",arrpsys1(w),- 0";
   arrpsys1(w):=0
  »
»;
CLEAR arrpsys1;
% ——————————————————— ———————————————————
% Print of the remained equations of the system "arrpsys"
WRITE "Conditions";
FOR w:=0:Lensys DO
IF (arrpsys(w) NEQ 0) THEN
« q:=q+1;
  WRITE "E",q,": ",arrpsys(w),- 0";
  arrpsys(w):=0;
»;
CLEAR q,Lensys, arrpsys;
SHUT Result3;

END;
```

3.4. Пример. В качестве примеров вычислим алгебру изотропии произвольной точки $\theta_k \in J^k\pi$ для $k = 0, 1, 2$. Для этого в декларации „ LET k=1;“программы раздела 3.3, положим k=0 и запустим ее в среде REDUCE. В результате получим систему линейных однородных алгебраических уравнений (10), приведенную к ступенчатому виду.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
X^1_{11} - 2X^2_{12} + 3u^1X^1_2 + u^2X^1_1 + 2u^3X^2_1 = 0 \\
2X^1_{12} - X^2_{22} + 2u^2X^1_2 + u^3X^2_2 + 3u^4X^2_1 = 0 \\
X^1_{22} + u^3X^1_2 - u^4X^1_1 + 2u^4X^2_2 = 0 \\
X^2_{11} - 2u^1X^1_1 + u^1X^2_2 - u^2X^2_1 = 0
\end{array}
\right. \tag{11}
$$

Откуда следует, что алгебра изотропии $\mathfrak{g}_{\theta_0}$ точки $\theta_0 = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ состоит из всех векторов $(X^i_j,\ X^i_{j_1j_2})_{i,j,j_1,j_2=1,2}$, удовлетворяющих системе (11).

Список литературы

[1] Виноградов А. М., Красильщик И. С. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. — Москва: Факториал, 1997, с. 464. ↑

[2] Yumaguzhin V. A. *On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations* // Acta Applicandae Mathematicae. — **83**, № 1–2, 2004, с. 133–148. ↑

[3] Гусятникова В. Н., Юмагужин В. А. *Точечные преобразования и линеаризуемость обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка* // Математические заметки. — **49**, № 1, 1991, с. 146–148. ↑

Инстиут программных систем Российской академии наук,
Россия, 152020, г. Переславль-Залесский, м. Ботик

Valeriy A. Yumaguzhin, Valeria N. Yumaguzhina. *The algorithm of calculation of isotropy algebras of equations* $y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y)$. (in russian.)

Abstract. The action of pseudogroup of all point transformations of variables x, y in the natural bundle of ordinary differential equations $y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y)$ is extended to the action on the bundle of k-jets of sections of π, $k = 0, 1, 2, \dots$. In this paper, the code of the computer algebraic system REDUCE to calculate isotropy algebras of this action is represented.